КОМПЛЕКСНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА И ТРАНСПОРТИРОВКИ ПРОДУКЦИИ

© 2018 **Рогулин Родион Сергеевич**
Дальневосточный федеральный университет

© 2018 **Нечаев Павел Владимирович**
Дальневосточный федеральный университет

© 2018 **Плешанов Дмитрий Евгеньевич**
Дальневосточный федеральный университет

© 2018 **Олейник Елена Борисовна**
доктор экономических наук
Дальневосточный федеральный университет
690091, г. Владивосток, ул. Суханова, д. 8
E-mail: oleinik.elena@gmail.com

В данной статье предложено комплексное решение трех задач линейного программирования: Производственная задача (классическая постановка), Транспортная задача, Задача максимального потока. Подобные задачи в предложенной комплексной постановке часто возникают на предприятиях в процессе производства и реализации продукции. Рассмотрены основные алгоритмы поиска оптимального решения, сформулирована комплексная задача, построена модель и реализован алгоритм решения. Предложенная модель может быть использована на любом предприятии, где необходимо найти оптимальный комбинаторный вариант для производства с целью минимизации производственных издержек и затрат на транспортировку готовой продукции, а также получения максимальной прибыли.

Ключевые слова: комплексная задача, матрица смежности, граф дорог, маршрут перевозок, оптимальное решение, целевая функция

Любое предприятие в процессе хозяйственной деятельности стремится к минимизации издержек и максимизации прибыли при ограничениях на ресурсы. При всем многообразии методов оптимизации процессов управления ресурсами предприятий в научной литературе недостаточно представлены единые алгоритмы и модели для нахождения оптимального решения **комплексных проблем хозяйственной деятельности предприятия**. На любом предприятии существуют следующие основные задачи оптимизации хозяйственной деятельности: задача производства (оптимальный выпуск продукции), транспортная задача [1,2], задача максимального потока [3,4,5], задача минимизации времени, задача о размещении центров сбыта (обслуживания), задача распределения людских ресурсов при производстве.

В общем виде оптимизационная задача — это экономико-математическая задача нахождения оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции $f(x_1,.., x_n)$ в некоторой допустимой области $\boldsymbol{W}$ значений переменных x_i, i=1,2,…,n. Математически в самом общем виде задача оптимизации записывается так:

$$f(x_1,.., x_n) \to \max;\ x_i \in \boldsymbol{W}\ i=1,2,\ldots,n$$

Для решения подобных задач используются алгоритмы поиска оптимального решения (табл. 1)

Метод Литтла представляет собой алгоритм отсечений путем генерации прямых (плоскостей, гиперплоскостей) и введением их в систему ограничений [6]. Метод ветвей и границ

Таблица 1. **Сравнение основных алгоритмов поиска оптимального решения**

Название алгоритма	Скорость сходимости	Учитывает ли проблему «Big Data»
Метод Литтла — Гомори [6,7]	Высокая	Нет
Метод ветвей и границ [8,9]	Низкая	Нет
Генетический алгоритм [10,11]	Низкая	Да

представляет собой дерево решений, конечным результатом которой является оптимальное решение [8,12]. Вышеперечисленные методы являются достаточно быстрыми алгоритмами для задач небольшой выборки. Однако, эти алгоритмы не справляются с проблемой, известной как “Big Data” в отличие от разработанного сравнительно недавно генетического алгоритма [10]. Данный алгоритм особенно хорош, когда мы говорим о задачах линейного программирования (ЛП). Главное в подобных задачах — это составить целевую функцию.

В нашей статье мы рассмотрим следующую комбинацию: задачу оптимальный выпуск продукции, транспортную задачу и задачу максимального потока, все они являются задачами ЛП, что значительно упрощает нахождения оптимального решения. Для реализации алгоритма поиска оптимального решения воспользуемся алгоритмом Литтла, так как он имеет высокую скорость сходимости.

Сформулируем обобщенную постановку задачи: какой объем произвести продукции так, чтобы при имеющейся пропускной способности дорог, заданных объемах ресурсов, имеющихся потребностей потребителя в каждом конечном пункте максимизировать прибыль и объем вывоза из каждого склада, и одновременно минимизировать издержки в процессе производства и транспортировки. Такая комплексная задача может быть полезна для предприятий с большим денежным и продуктовым оборотами, которые имеют в своем распоряжение личное производство, транспортные сети (к примеру, дочерние компании), стремящихся к максимизации прибыли.

Последовательно сформулируем математическую постановку каждой из задач ЛП. Пусть m — число конечных пунктов потребления, n — число вершин в графе, определяющем маршрут перевозок; m_1 — типы производимого товара, n_1 — типы сырья. Предположим, существует некоторый “рецепт” производства каждого вида товара из исходного вида сырья. Обозначим сам “рецепт” как

$$A = \{a_{ij}\}, i = 1:n_1 \quad , j = 1:m_1, \tag{1}$$

где A_{ij} это элемент, соответствующий количеству ресурса *i* для производства *j* товара.

Пусть также существует граф дорог (матрица смежности) с ее пропускной способностью и обозначим ее как

$$D = \{d_{ij}\}, \ i = 1:n, j = 1:m \tag{2}$$

Определим вектор цен реализации товара j, как

$$p = \{p_j\}, j = 1:m_1 \tag{3}$$

Пусть существует некоторое количество товара, определенное спросом потребителя (заказчики продукции). Обозначим его за

$$s = \{s_i\}, i = 1:m \tag{4}$$

Кроме того, определим затраты С на перевозку товара из пункта *i* в *j*

$$C = \{c_{ij}\}, i = 1:n, j = 1:n. \tag{5}$$

Для полноты набора данных остается определить количество запасов сырья, обозначим их как

$$b = \{b_i\}, i = 1:n_1 \tag{6}$$

Транспортная задача. Пусть X — матрица товаров, каждый ее элемент x_{ij}–количество товара, перевозимое из пункта *i* в пункт *j*.

$$X = \{x_{ij}\}, i = 1:n \quad , j = 1:m \quad , \tag{7}$$

Необходимо минимизировать расходы, тогда целевая функция примет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} \to \min \tag{8}$$

Учтем спрос потребителя, тогда [1, 18]:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = s_j, j = 1:m \tag{9}$$

Также, учтем запасы на складе, тогда [1, 17, 18]:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i, i = 1:n \tag{10}$$

Задача о максимальном потоке. Из классической постановки задачи о максимальном потоке следует, что необходимо максимизировать суммарный поток, тогда целевая функция примет вид [3,4]:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to \max \tag{11}$$

Существует определенная пропускная способность, тогда ограничение примет вид [3,5]:

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, i = 1{:}n, j = 1{:}n \quad (12)$$

Определим объем выходящего потока равным входящему. Это значит, что не существует количества товара, которое бы осталось на промежуточных стадиях перевозки и каждый раз товар будет полностью вывезен [3,4,5], тогда

$$\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} ; i, j \in I, J, \quad (13)$$

где I, J есть множества входных и выходных размеров дуг соответственно.

Добавим также ограничение целочисленности, тогда

$$x_{ij} \in Z^+, \quad (14)$$

Производственная задача. Пусть k_j — есть количество товара j, которое подлежит производству из условия оптимума. Задача об оптимальном производстве сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m_1} k_j p_j \to \max \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{m_1} A_{ij} k_j \leq b_i, i = 1{:}n_1 \quad (16)$$

$$k_j \in Z^+ \quad (17)$$

Где x_{ij}— есть количество продукции, перевозимое из пункта i в пункт j, k_j — произведенное количество j товара.

Мы предлагаем комплексное решение задачи F_0 которое может быть записано следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} - \sum_{i=1}^{m_1} k_j p_j \to min,$$

$$\sum_i x_{ij} - \sum_j x_{ij} = 0; i, j \in I, J \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = s_j, j = 1{:}m, \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^{m_1} A_{ij} k_j \leq b_i, i = 1{:}n_1 \quad (21)$$

$$k_j \in Z^+ \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = k_i, i = 1{:}m_1 \quad (23)$$

F_0 является задачей линейного целочисленного программирования.

Подобные задачи часто возникают на любых производственных предприятиях: что производить и в каких объёмах, чтобы суммарная прибыль предприятия была максимальна с учетом минимизации издержек.

Задача F_0 может быть решена с помощью пакета Matlab. Ответ получим в виде одномерных массивов размерности $r + n^2$. Первые r элементов отвечают за количество единиц произведенного товара. Остальные n^2 переменных — объем перевезенной продукции по каждой дуге. Рассмотрим задачу F_0 подробнее.

Исходные данные следующие: максимальный грузовой поток из каждой вершины в каждую возможную и матрица стоимостей для перевозки с соответствующей вершину в следующую (матрицы смежности D и матрицы C соответственно), и матрица потребностей s = (10;5) единиц в конечных пунктах, цены реализации P = (4; 9; 10.5; 6.5) у.е., нормы затрат сырья на производство единицы каждого товара

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

запасы ресурсов b = (40; 60; 70; 100) у.е. На рисунке 1 можно увидеть произвольную визуализацию матрицы D. Номера вершин — пункты производства, промежуточные пункты и пункты потребления. Веса дуг матрицы D — это максимальное число единиц продукции, которое можно провезти по каждой дуге.

Решим задачу двумя способами: последовательно (код представлен в [13]) и комплексно (код представлен в [14]). Рассмотрим результаты решения (Таблица 2). Количество пунктов производства r = 4, первые четыре вершины графа. Тогда n-r-m — число остальных вершин графа (перекрестки, склады, перевалочные пункты и т.д.). При одинаковом объеме производства (15 единиц продукции), суммарные затраты на перевозку при комплексном решении меньше, а остатки сырья в пунктах производства больше: 11 натур. ед. при последовательном и 15 натур. ед. при комплексном решении.

Предложенный подход обобщает ранее известные 3 классические задачи линейного программирования. Комплексная постановка задачи и модель могут быть использованы на любом предприятии, где необходимо найти оптимальный комбинаторный вариант для производства с целью минимизации производственных издержек и затрат на транспортировку готовой продукции, а также получения максимальной прибыли.

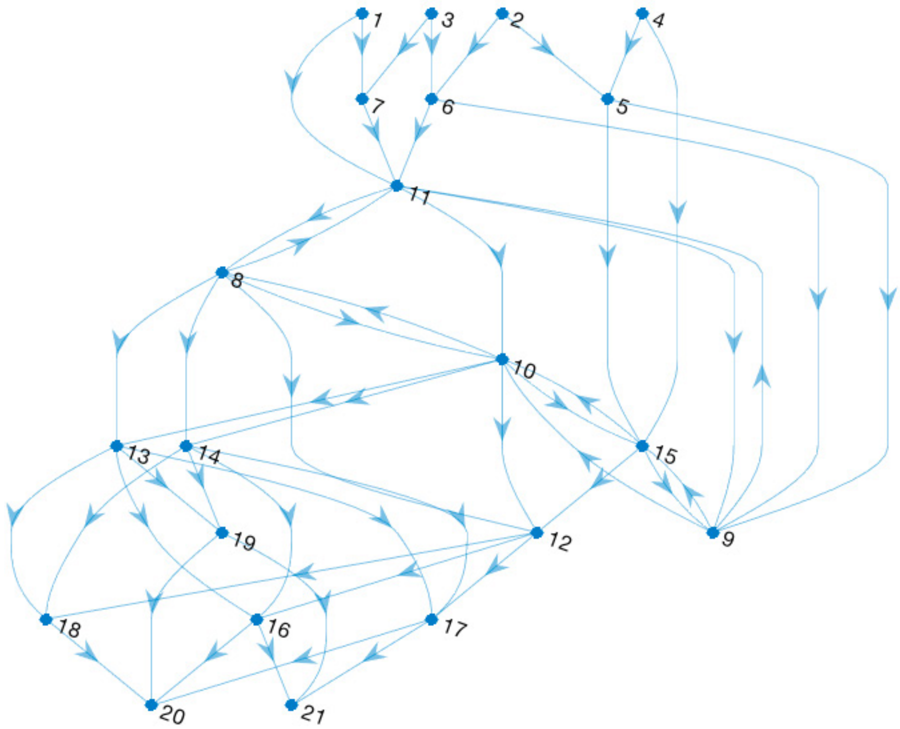

Рис. 1. **Произвольная визуализация матрицы смежности D — стоимости перевозок**

Таблица 2. **Сравнение результатов решения задачи F0**

	Последовательно	Комплексно
Объем произведенной продукции в каждом из r пунктов производства, шт	(6, 1, 2, 6)	(6, 0, 2, 7)
Суммарные затраты на перевозку, у.е.	1562 (формула 8)	1553 (формула 18)
Остатки сырья каждом из пунктов производства, натур. ед.	(8, 0, 1, 2)	(8, 2, 3, 2)
Эффект комплексного решения, у.е.	6,8	

Библиографический список

1. *Семериков А.В.* Решение транспортных задач. Ухта. 2013. 58 с.
2. *Sumathi P.* A new approach to solve linear programming problem with intercept values // Journal of Information and Optimization Sciences. 2016. 37:4, С. 495–510, DOI: 10.1080/02522667.2014.996031
3. *Ford, L.R. Jr., Fulkerson D.R.* Maximal Flow through a Network // Canadian Journal of Mathematics. 1956. P. 399–404.
4. *Gharehbolagh H.H., Hafezalkotob A., Makui A., and Raissi S.* A cooperative game approach to uncertain decentralized logistic systems subject to network reliability considerations // Kybernetes, 2017. vol. 46, no. 8, P. 1452–1468,
5. *Tanyimboh T.T.* & *Templeman A.B.* Maximum entropy flows for single-source networks, Engineering Optimization. 2007. 22:1, P. 49–63, DOI: 10.1080/03052159308941325
6. *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций. Москва. 1971. 534 с.
7. *Lee, J., & Wiegele, A.* Another pedagogy for mixed-integer Gomory. EURO Journal on Computational Optimization. 2017. No. 5(4), P. 455–466. DOI: 10.1007/s13675–017–0085–3
8. *Land A.H., Doig A.G.* An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrica. V28, 1960.

9. *Morrison, D. R., Sewell, E. C., & Jacobson, S.H.* An application of the branch, bound, and remember algorithm to a new simple assembly line balancing dataset // European Journal of Operational Research, 2014. 236(2), 403–409. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.11.03
10. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы = Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte.— 2-е изд.— М: Горячая линия-Телеком, 2008. 452 с. ISBN5–93517–103–1.
11. *Siew Mooi Lim, Abu Bakar Md. Sultan, Md. Nasir Sulaiman, Aida Mustapha, and K.Y. Leong*. Crossover and Mutation Operators of Genetic Algorithms // International Journal of Machine Learning and Computing. 2017. vol. 7, No. 1. P. 9–12
12. *Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К.* Алгоритмы: построение и анализ (Introduction to Algorithms) / Под ред. И.В. Красикова. 2-е изд. Москва.: Вильямс, 2005. 1296 с.— ISBN5–8459–0857–4.
13. URL: https://pastebin.com/N2U8UWQm
14. URL: https://pastebin.com/9cWFDtZS

Поступила в редакцию 24.07.2018 г.