ОЦЕНКА СТОИМОСТИ КРЕДИТНОГО ДЕРИВАТИВА НА ОСНОВЕ ЦЕНЫ БЕЗРАЗЛИЧИЯ

© 2012 О.В. Буреш
доктор экономических наук, профессор
© 2012 А.Г. Реннер
кандидат технических наук, доцент
© 2012 Т.А. Зеленина
Оренбургский государственный университет
E-mail: dntimofeev@mail.ru

Представлены результаты оценки стоимости кредитного дериватива как цены безразличия, при которой кредитор индифферентен к выбору между кредитным дефолтным свопом и вкладом на депозитный счет. Рассмотрен подход к определению цены безразличия на основе функции полезности кредитора.

Ключевые слова: кредитный дериватив, цена безразличия, функция полезности.

Хеджирование кредитных рисков на основе кредитных деривативов в российской практике применяется довольно недавно. Кредитные деривативы относятся к новому классу производных финансовых инструментов, позволяющих управлять кредитным портфелем при изменении кредитоспособности заемщиков.

С появлением кредитных деривативов управляющие кредитным портфелем получили новые способы формирования портфеля и изменения его структуры. Кредитные деривативы можно использовать с целью уменьшения подверженности рискам портфеля определенной группы заемщиков (покупка кредитных деривативов) и диверсификации портфеля путем принятия рисков, связанных с другими отраслями экономики либо другими географическими регионами[1].

Кредитный дериватив - это инструмент, выплата по которому зависит от наступления определенного кредитного события у третьей стороны. Наиболее распространенным кредитным деривативом является кредитный дефолтный своп (credit default swap, CDS). В общем случае CDS - это договор между двумя контрагентами, по которому одна сторона выплачивает другой определенную сумму при наступлении кредитного события у третьей стороны или по определенному набору финансовых активов (базовому портфелю)[2].

Рассмотрим задачу оценки стоимости кредитного дериватива и ее решение, в котором стоимость кредитного дериватива для покупателя (кредитора) определяется как цена безразличия, т.е. цена, при которой покупателю одинаково безразлично - приобрести кредитный дериватив или выбрать вклад на депозитный счет.

В работах П. Артзнера и Ф. Делбаена[3], Д. Ландо[4], Д. Мадана и Г. Унала[5], Р. Джарроу и С. Торнбулла[6] рассматривается подход, основанный на моделях интенсивности. В этих моделях время дефолта моделируется как первый скачок процесса Кокса. Пусть $N(t),\ t>0$ - однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью. Рассмотрим $\Lambda(t),\ t>0$ - независимый от $N(t)$ случайный процесс с неограниченно возрастающими, почти непрерывными траекториями, выходящими из нуля. Процесс Кокса (дважды стохастический пуассоновский процесс), управляемый процессом $\Lambda(t)$, определяется как

$$N_1(t) = N\left(\Lambda(t)\right),$$

где $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(z)dz$. (1)

В работе[7] предлагается искать цену безразличия на основе функций полезности инвестора. В качестве интенсивности дефолта рассматривается функция следующего вида:

$$\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(tg^{-1}(z)+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (2)$$

Пусть $W=(W_1,W_2)$ - стандартный двумерный винеровский процесс, определенный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P). Средства могут быть вложены кредитором в рисковый актив, цена которого изменяется в соответствии с процессом $S(\cdot)$:

$$dS_t = S_t \cdot \left(\mu\, dt + \sigma\, dW_t^{(1)}\right); \quad S_0 = s > 0. \tag{3}$$

Кредитор имеет первоначальный капитал в размере $X \geq 0$ и получает прибыль от предоставления денег в долг в размере заданной ставки $Y(\cdot)$:

$$dY_t = Y_t \cdot \left(bdt + a \cdot \rho dW_t^{(1)} + a \cdot \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^{(2)}\right); \quad Y_0 = y > 0. \tag{4}$$

Коэффициенты μ и b характеризуют средний прирост в единицу времени цены рискового актива и процентной ставки по кредиту соответственно, а коэффициенты σ и a - их волатильность. Процессы $W^1 = (W_t^{(1)})$ и $W^2 = (W_t^{(2)})$ - независимые винеровские процессы. Параметр $\rho \in (-1;1)$ показывает немедленную корреляцию между шоками цены *S* и ставки *Y*.

Время дефолта τ может быть определено как момент первого скачка процесса Кокса $N(t)$ с управляющим процессом $\Lambda(t)$:

$$\tau = inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t \lambda(Y_z)dz = \xi\right\}, \tag{5}$$

т.е. время, за которое накопленная интенсивность достигнет случайной величины ξ, имеющей экспоненциальное распределение и не зависящей от броуновского движения.

Пусть имеется кредитный портфель со сроком погашения через $T = 12$ мес. График управляющего процесса $\Lambda(t)$ представлен на рис. 1.

Из рис. 1 следует, что начало первого скачка процесса Кокса приходится на второй месяц после формирования портфеля кредитов, следовательно, высока вероятность дефолта базового заемщика в момент времени $\tau = 2 < T$.

Кредитор, имеющий проблемный портфель, может продать рисковые бумаги и получить доступ к безрисковым банковским счетам, дающим доход в виде ставки банковского процента r. Процесс управления π_t представляет сумму на депозитном счете в момент времени *t* для $t < \tau < T$. Динамика процесса $X = (X_t)$, характеризующего капитал в момент времени *t*, имеет вид

$$dX_t = (r \cdot X_t + \pi_t \cdot (\mu - r))dt + \sigma \cdot \pi_t\, dW_t^{(1)}. \tag{6}$$

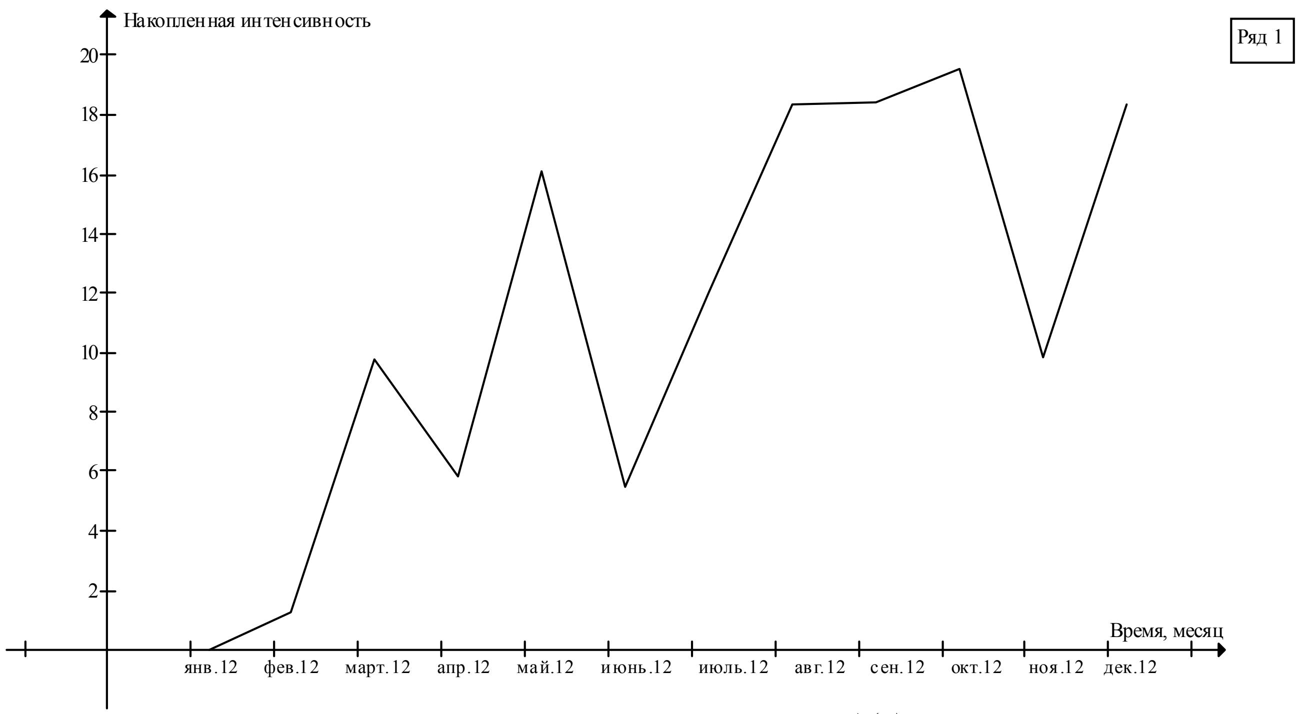

Рис. 1. **График управляющего процесса** $\Lambda(t)$

Управление $\pi = (\pi_t)$ называется допустимым, если оно F_t -измеримо и удовлетворяет условию

$$M\left[\int_0^T \pi_t^2\, dt\right] < \infty. \tag{7}$$

В отсутствие подверженных дефолту требований функция полезности кредитора может быть представлена в виде

$$G(t,x,y) = \sup_{\pi} F_{t,x,y}\left(-\ell^{-\gamma \cdot X_T}\Big|_{\{\tau_t > T\}} + \right.$$
$$\left. + (-\ell^{-\gamma \cdot X_{\tau_t}})\Big|_{\{\tau_t \le T\}}\right), \tag{8}$$

где $F_{t,x,y}[\cdot] = M[\cdot \,|\, X_t = x,\ Y_t = y]$; (9)

γ - степень неприятия риска, $0 \le \gamma \le 1$.

Рассмотрим полезность, с точки зрения кредитора, который владеет портфелем, подверженным дефолту. Определяя через $c = \ell^{-rT}$, функцию полезности можно записать в виде

$$Q(t,x,y) = \sup_{\pi} F_{t,x,y}\left(-\ell^{-\gamma \cdot (X_T + c)}\Big|_{\{\tau_t > T\}} + \right.$$
$$\left. + (-\ell^{-\gamma \cdot X_{\tau_t}})\Big|_{\{\tau_t \le T\}}\right). \tag{10}$$

В результате получена задача определения последовательности, максимизирующей полезность кредитора, с управляющим процессом π_t при условии (9). Уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана относительно функции полезности *G*, принадлежащей классу вогнутых, возрастающих по *x* и равномерно ограниченных по *y* функций, имеет вид

$$G_t + L_y G + \max_{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\pi^2\cdot G_{xx} + \pi\cdot(\rho\cdot\sigma\cdot a\cdot G_{xy} + \mu\cdot G_x)\right\} +$$
$$+ \lambda(y)\cdot\left(-\ell^{-\gamma \cdot x} - G\right) = 0, \tag{11}$$

где $G(T,x,y) = -\ell^{-\gamma \cdot x}$; (12)

$$L_y = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b\cdot\frac{\partial}{\partial y}. \tag{13}$$

Аналогичное уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана получается относительно функции полезности *Q*:

$$Q_t + L_y Q + \max_{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\pi^2\cdot Q_{xx} + \pi\cdot(\rho\cdot\sigma\cdot a\cdot Q_{xy} + \mu\cdot Q_x)\right\} +$$
$$+ \lambda(y)\cdot\left(-\ell^{-\gamma \cdot x} - Q\right) = 0, \tag{14}$$

где $Q(T,x,y) = -\ell^{-\gamma \cdot (x+c)}$. (15)

Цена безразличия для покупателя $p_0(T)$ в нулевой момент времени определяется по формуле

$$G(0,x,y) = Q(0, x - p_0, y). \tag{16}$$

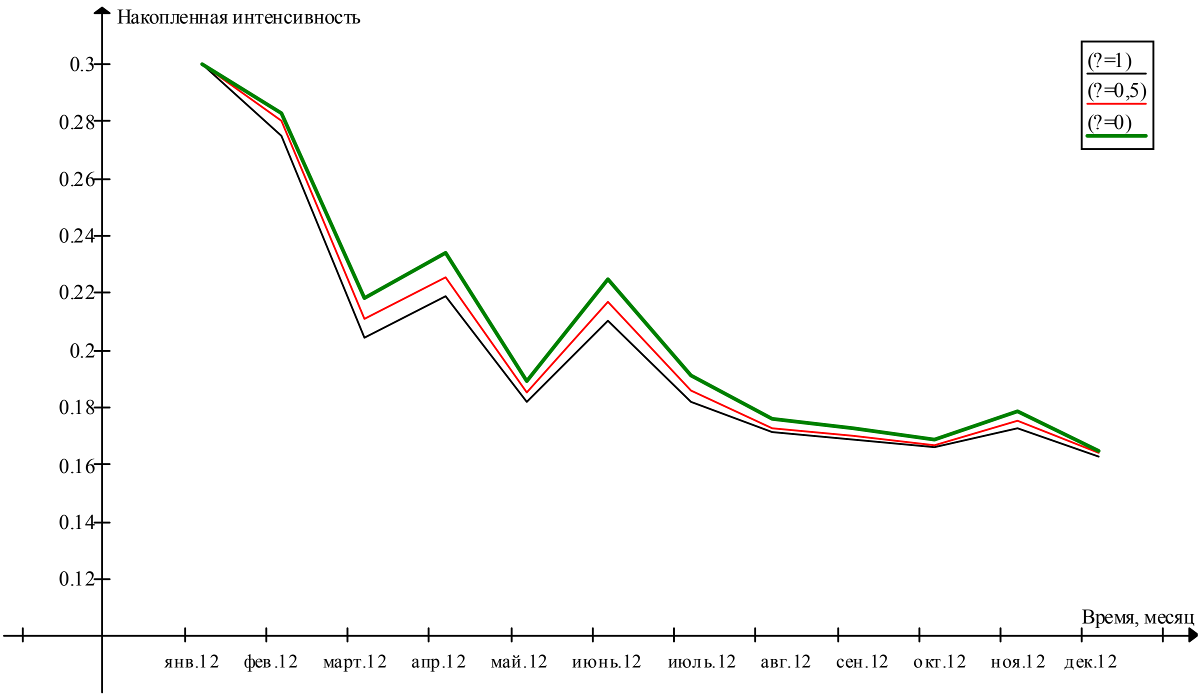

Рис. 2. **График изменения цены безразличия $p_0(T)$ для покупателя кредитного деривatива при различном сроке погашения кредитов $T \in (1;12)$, млрд. руб.**

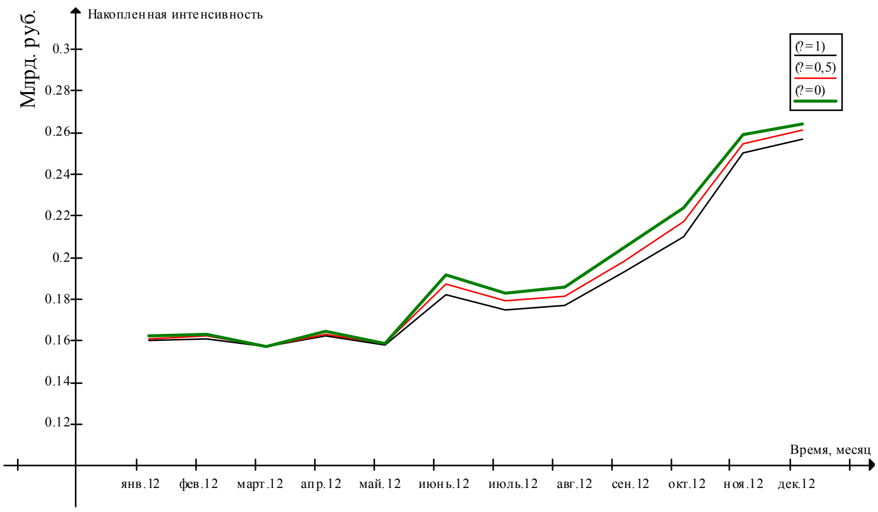

Рис. 3. **График изменения цены безразличия $p_t(T)$ в момент времени *t* для покупателя кредитного деривата при сроке погашения портфеля T = 12 мес., тыс. руб.**

Цена безразличия в момент времени $0 < t < T$ определяется аналогично с учетом изменения стоимости денег во времени.

На рис. 2 представлен график изменения цены безразличия $p_0(T)$ для покупателя кредитного деривата при различном сроке погашения портфеля кредитов $T \in (1;12)$. Рассмотрим портфель объемом 1 млрд. руб., включающий кредиты, выданные физическим лицам на срок до 1 года.

Таким образом, для несклонного к риску кредитора в январе 2012 г. цена безразличия на кредитный дериватив по портфелю кредитов, выданному на срок до двух месяцев, составит 204 млн. руб. При сроке погашения портфеля в три месяца цена безразличия возрастает до 219 млн. руб., что связано с возможным (вероятным) дефолтом по истечении второго месяца. С ростом срока погашения портфеля кредитов цена безразличия для покупателя снижается за счет увеличения дохода, получаемого с депозитного счета. Так, при сроке погашения T = 12 мес. цена безразличия составит 163 млн. руб.

В среднем цена безразличия для кредитора, склонного к риску ($\gamma = 0$), выше, чем для кредитора, не склонного к риску ($\gamma = 1$), на 3,3 %.

На рис. 3 представлен график изменения цены безразличия $p_t(T)$ в момент времени *t* для покупателя кредитного деривата при сроке погашения портфеля T = 12 мес.

Из рис. 3 видно: чем позже срок приобретения кредитного деривата ($t \to T$), тем выше цена безразличия для покупателя. Таким образом, если срок погашения кредитов наступает через год, то в январе 2012 г. кредитор либо приобретет кредитный дериватив по цене 160 млн. руб., либо сделает на эту сумму вклад на депозитный счет. Покупка кредитного деривата к концу срока погашения с точки зрения покупателя дороже в 1,5 раза, поскольку за оставшийся период времени накопленной на депозитном счете суммы будет недостаточно для покрытия возможных убытков.

---

[1] *Саакян Д.Ж.* Влияние кредитных деривативов на эффективность управления банковским портфелем // Рос. экон. интернет-журн. / Акад. труда и социал. отношений. М., 2009. URL: http://www.econ.msu.ru/cmt2/lib/a/1469/file/Saakyan.pdf.

[2] *Мезенцев В.В.* Риск контрагентов сделки кредитного дефолтного свопа как существенный фактор глобального финансового кризиса // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия "Экономика и менеджмент". Вып. 16. 2010. № 39 (215). С. 15-24.

[3] *Artzner P., Delbaen F.* Default risk insurance and incomplete markets // Mathematical Finance. 1995. № 5. P. 187-195.

[4] *Lando D.* On Cox processes and credit risky securities // Review of Derivatives Research. 1998. № 2. P. 99-120.

[5] *Madan D., Unal H.* Pricing the risks of default // Review of Derivatives Research. 1998. № 2. P. 121-160.

[6] *Jarrow R., Turnbull S.* Pricing options on financial securities subject to credit risk // J. Finance. 1995. № 50. P. 53-85.

[7] *Sircar R., Zariphopoulou T.* Utility Valuation of Credit Derivatives: Single and Two-Name Cases // M. Fu (ed.). Volume in Honor of Dilip Madan. University of Maryland. 2006. URL: http://www.princeton.edu/~sircar/Public/ARTICLES/madan_volume.pdf.

Поступила в редакцию 03.11.2012 г.