ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ УСТОЙЧИВОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И РАЗВИТИЯ МИНИ-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЦЕЛИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ФАКТОРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

© 2011 А.В. Шмидт
кандидат экономических наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
E-mail: uvr@susu.ac.ru

Рассматриваются современные теоретико-методологические подходы к оценке экономической устойчивости промышленных предприятий. Предлагается оценку экономической устойчивости целеориентированной экономической системы производить на основе вероятностно-статистических методов.

Ключевые слова: экономическая устойчивость, мини-экономическая система, экономико-математические модели.

Проектирование методов оценки промышленного предприятия по критериям экономической устойчивости с позиции динамики связано с выработкой методологических подходов к формированию системы ее показателей. На современном этапе развития экономической мысли показатели, позволяющие произвести оценку динамической экономической устойчивости, имеют существенное значение для выявления резервов и возможностей повышения эффективности функционирования и развития мини-экономических систем в условиях неопределенной среды с высокой степенью вариабельности возмущающих воздействий. Определение показателей экономической устойчивости мини-экономического субъекта существенно дополняет информацию, получаемую в результате проведения стандартных процедур экономического анализа[1].

Закономерно, что сложность построения специальных алгоритмов для проведения анализа устойчивости объектов мини-экономики в условиях неопределенной внешней среды связана с уровнем организационных форм современных промышленных предприятий[2]. Основными характеристиками современных промышленных предприятий как открытых социально-экономических систем являются сложность организационной структуры, нестационарность и неопределенность возмущений.

Промышленное предприятие, как мини-экономическая система, характеризуется большим количеством элементов и связей между ними, постоянным воздействием различных внешних и внутренних факторов макро-, мезо- и микросред различной степени вариабельности. При этом внутрифирменные процессы из-за организационной сложности плохо формализуемы. Таким образом, возникает необходимость разработки непараметрических экономико-математических методов определения показателей экономической устойчивости, характеризующих экономическую ситуацию в мини-экономической системе, сложившуюся в данный конкретный интервал времени.

При определении показателей экономической устойчивости на основе анализа результатов деятельности фирмы представляется целесообразным использовать модели, основанные на анализе потоков наличности - cash flow.

При этом необходимо прогнозировать возможные значения факторов и возмущающих воздействий различного генезиса, которые оказывают влияние на формирование денежного потока, анализировать количественное влияние возмущений различного уровня на элементы структуры денежного потока, определяющего итоговые значения показателей деятельности промышленного предприятия.

В результате взаимодействия факторов различного генезиса получаются определенные значения различных показателей[3], характеризующих результаты деятельности фирмы: выручки от реализации, налогооблагаемой прибыли и чистого притока от операции и соответствующие им показатели эффективности.

Для промышленных предприятий к базисным компонентам выделенных групп факторов возмущающих и управляющих воздействий относятся следующие:

- детерминированные факторы - стоимость оборудования, нормы амортизационных отчислений, различные нормы расхода материальных ресурсов и выработки;

- неопределенные факторы - стоимость материальных ресурсов, объем продаж, спрос на продукцию, уровень налогообложения и др.;

- факторы, по которым принимается управленческое решение, - цена продукции, размер заработной платы, размер маркетинговых расходов и пр.

Нужно отметить, что именно колебания неопределенных факторов являются по сути входными возмущающими воздействиями мини-экономической системы. Решение задачи устойчивого функционирования можно свести к поиску методов компенсации негативного влияния колебаний неопределенных факторов.

Для введения специального количественного показателя экономической устойчивости рассмотрим это понятие с позиции динамики.

Для экономической устойчивости возможна следующая интерпретация: пусть имеется траектория развития мини-экономической системы, отражающая смену параметров ее состояния, и пусть определена некоторая область е* допустимых отклонений реальной фазовой траектории от намеченной траектории развития. Тогда, если существует область у*, все точки которой принадлежат е* и траектория цели проходит через область у*, и если реальная траектория, лежащая в области у*, никогда не выходит за пределы области е* всюду на участке траектории, то мини-экономическая динамическая система является устойчивой. Подобный подход используется при анализе устойчивости технических систем по Ляпунову. Нас интересует явление динамической экономической устойчивости, и в дальнейшем, проводя аналогии устойчивости экономических систем с устойчивостью природных и технических систем, будем иметь в виду именно динамическую устойчивость, поскольку фактор времени в данном случае в принципе невозможно исключить из рассмотрения.

Представляется, принципиальным в переходе от рассмотрения технической системы к социально-экономической является то, что отклонения реальных траекторий развития от траектории цели происходят случайно, стохастически, и получить точную информацию об этих отклонениях невозможно. И если об устойчивости технической системы по Ляпунову можно судить однозначно, анализируя дифференциальные уравнения, характеризующие поведение системы, то в рассматриваемом ключе анализа проблемы экономической устойчивости из-за невозможности в большинстве случаев составить дифференциальные уравнения функционирования экономической системы вывод об устойчивости или неустойчивости можно делать только с определенной вероятностью, применяя предлагаемую в дальнейшем методику. Решающим моментом в определении показателя устойчивости для данного класса систем является свойство отклонений реальных траекторий развития, заключающееся в том, что эти отклонения происходят хотя и случайно, но можно определить вероятность определенного отклонения реальной фазовой траектории от траектории цели в каждой точке, т. е. представляется, что существует закон распределения вероятностей этих отклонений. Существование закона распределения вероятностей отклонений реальной фазовой траектории мини-экономической системы от траектории цели влечет за собой возможность определения вероятности отклонений реальной траектории от траектории цели, при которых поставленная цель все-таки достигается. Вероятность невыхода реальной фазовой траекторией функционирования и развития мини-экономической системы за пределы области цели (области е*) на всем протяжении траектории цели является показателем устойчивости функционирования целеориентированной социально-экономической системы относительно поставленной цели. В этой связи задача анализа экономической устойчивости функционирования мини-экономической системы относительно поставленной цели состоит в определении меры возможности достижения системой поставленной цели в условиях неопределенности параметров внешней среды.

Если устойчивость функционирования системы есть вероятность достижения некоторой количественно характеризуемой цели, то задача анализа устойчивости сводится к отысканию закона распределения вероятностей количественных исходов функционирования мини-экономической системы и нахождения вероятности достижения цели, пользуясь найденным законом распределения.

Возможным подходом к решению задачи устойчивого функционирования мини-экономической системы промышленного предприятия относительно поставленной цели является определение функции распределения целевого функционала с помощью законов совместного распределения случайных параметров системы. В такой постановке задачу определения законов распределения целевой функции случайной величины можно применить при определении вероятности попадания указанной функции в область ее допустимых значений[4].

Рассмотрим случай, когда целевой функционал мини-экономической системы является функцией случайных параметров $x_1, x_2, \ldots, xn$.

$$Z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

при ограничении

$$Z \geq q^{**}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{2}$$

Вероятность устойчивого функционирования мини-экономической системы относительно поставленной цели можно определить, используя функцию распределения $R(Z)$.

$$R(Z) = P\{Z \geq q^{**}\}\,. \tag{3}$$

Рассмотрим целевую функцию, которая зависит от комбинации законов распределения независимых параметров системы, распределенных по нормальному закону, и которую можно записать в виде

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\,, \tag{4}$$

где a_i и b - детерминированные коэффициенты;

x_i - случайные параметры мини-экономической системы.

Рассмотрим случай, когда целевая функция является суммой случайных величин x_i с плотностями распределения $f(x_i)$, соответственно. Найдем плотность распределения вероятностей $f(Z)$ стохастической величины $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$. Поясняет поставленную задачу рис. 1.

Функцию распределения вероятностей случайной величины Z

$$F(Z) = P(Z \geq q^{**}) = P(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \geq q^{**}) \tag{5}$$

можно получить, проинтегрировав n-мерную плотность вероятностей $f(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b)$ по области, расположенной над прямой $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i x_i + b = q^{**}$. При

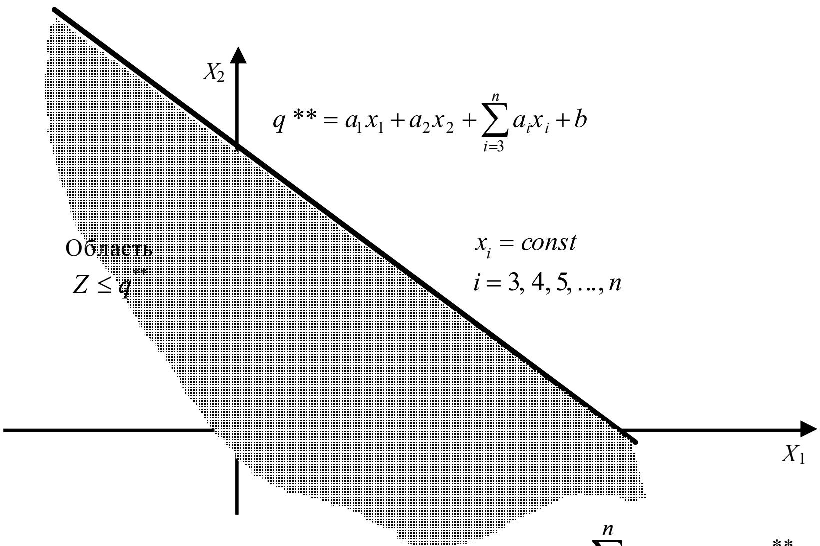

Рис. 1. **Построение области** $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \geq q^{**}$

этом будем считать, что q^{**} является детерминированной величиной. Для любого заданного значения x_i значение x должно быть таким, чтобы выполнялось условие $-\infty < x < Z - x_i$. Тогда можно получить[5]:

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{Z-x_i}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n . \quad (6)$$

В частности, если x_i и x_j статически независимые, то их совместную плотность распределения вероятностей можно представить в виде произведения сомножителей и выражение (6) примет вид

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{Z-x_i}^{\infty} f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n . \quad (7)$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \geq q^{**}$ найдем, продифференцировав $F(Z)$ по Z.

На основании теоремы Лейбница - Ньютона переменный интеграл с переменным нижним пределом есть непрерывная функция, а производная от данного интеграла по переменной есть первообразная этого интеграла[6].

Тогда можно записать

$$f(Z) = \frac{dF(Z)}{dZ} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i - Z) \int f(x_{i+1}) .. dx_1 .. dx_{n-1} , \quad (8)$$

поскольку переменная Z фигурирует только в нижнем пределе одного из интегралов. Итак, можно заметить, что в данном случае $f(Z)$ представляет собой свертку одномерных плотностей распределения вероятностей случайных величин.

Следует заметить, что свертку типа (8) можно применять к любому фактору мини-экономической системы x_i.

Учитывая, что линейные преобразования законов распределения плотностей факторов внешней среды мини-экономической системы не приводят к изменению закона плотности распределения целевого функционала, можно записать условия попадания целевой функции в заданные пределы $q^{**} \leq Z \leq q^{*}$.

$$P(q^{**} \leq Z \leq q^{*}) = \int_{q^{**}}^{q^{*}} f(Z) dZ = \Phi(\frac{q^{*} - \overline{Z}}{\sigma_Z}) - \Phi(\frac{q^{**} - \overline{Z}}{\sigma_Z}), \quad (9)$$

где $\Phi(.)$ - интеграл вероятности (функция Лапласа), который можно определить по таблицам (например, прил. 2[7]).

В качестве примера рассмотрим закон распределения целевого функционала мини-экономической системы в зависимости от распределенных трех случайных величин факторов внешней среды.

Пусть задана функция

$$Z = a_0 x_0 x_1 + a_2 x_2 + b , \quad (10)$$

где Z - годовая балансовая прибыль;

x_0 - объем сбыта промышленного предприятия;

x_1 - цена за единицу продукции;

x_2 - условно переменные издержки;

a_1, $a_2 < 0$ - постоянные коэффициенты;

b - условно-постоянные издержки.

Для упрощения решения задачу сведем к двум случайным параметрам и выражение (10) представим в виде

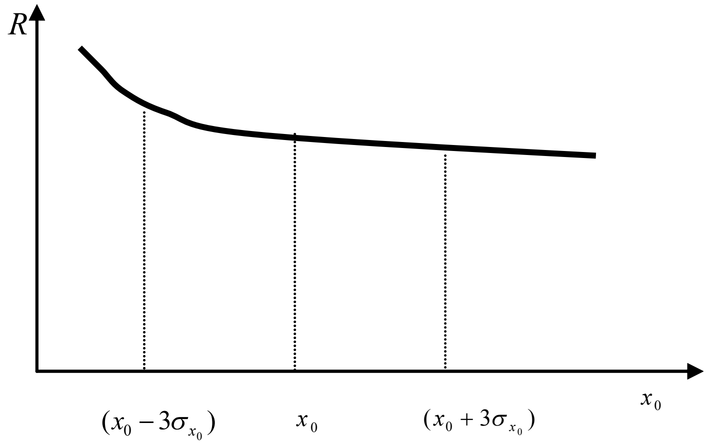

Рис. 2. **Зависимость вероятности устойчивого функционирования мини-экономической системы в момент времени t_i от стохастического фактора x_0**

$$Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b, \qquad (11)$$

где $a_1 = a_0 x_0$.

Случайный параметр x_0 учтем с помощью решения собственно трех задач: первое решение получим при $(x_0 - 3\sigma_{x_0})$, второе - x_0 и третье $(x_0 + 3\sigma_{x_0})$. Здесь приняты интервалы для решения $\pm 3\sigma_{x_0}$ (где σ_{x_0} - среднеквадратическое отклонение фактора x_0) математического ожидания $\bar{x}_0$, так как вероятность при таких отклонениях переменной мала. По полученной вероятности устойчивого функционирования можно построить график $R=ц(x_0)$ в виде, представленном на рис. 2, и оценить влияние переменной x_0 на вероятность устойчивого функционирования мини-экономической системы.

Учитывая, что совместную плотность распределения статически независимых величин x_1 и x_2 можно представить в виде[8]

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_1}} e^{-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2\sigma_{x_1}{}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_2}} e^{-\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2\sigma_{x_2}{}^2}}, \qquad (12)$$

найдем плотность распределения целевого функционала мини-экономической системы

$$Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b. \qquad (13)$$

Функцию распределения вероятностей случайной величины Z

$$F(Z) = P(Z \geq q^{**}) = P(a_1 x_1 + a_2 x_2 + b \geq q^{**})$$

можно получить, проинтегрировав двумерную плотность распределения (12) по области, расположенной над прямой $q^{**} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b$.

Выразим, например, $x_1 = \frac{y - a_2 x_2 - b}{a_1}$ и проведем замену предела в (9). Следовательно, можно записать

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{Z - a_2 x_2 - b}{a_1}}^{-\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$

Продифференцировав выражение по dZ, получим плотность распределения вероятностей случайной величины Z в виде[9]

$$f(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sign(a_1)}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{Z - a_2 x_2 - b}{a_1 - \bar{x}_1}\right)^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{(x_2 - x_2^2)}{\sigma_{x_2}^2}\right]} dx_2 =$$

$$= \frac{sign(a_1)}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax_2^2 + 2Bx_2 + C} dx_2 ,$$

где $A = \frac{1}{2a_1^2}\left[\frac{a_2^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{a_1^2}{\sigma_{x_2}^2}\right]$;

$$B = -\left[\frac{Z - b - a_1\bar{x}_1}{a_1^2 \sigma_{x_1}^2} - \frac{Z - b - a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2}{a_1 \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} - \frac{\bar{x}_2}{\sigma_{x_2}^2}\right];$$

$$C = -\frac{1}{2}\left[\frac{(y - b - a_1 x_1)^2}{a_1^2 \sigma_1^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{\sigma_{x_2}^2}\right].$$

При подстановке последних выражений в формулу плотности распределения $f(Z)$ получим

$f(Z) = \frac{sign(a_1)\sqrt{\pi}}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{2}}$. После преобразований получим

$$f(Z) = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Z - \bar{Z})^2}{2\sigma_Z^2}}, \qquad (14)$$

где $sign(a_1)$ - знак a_1;

$\bar{Z} = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + b$ - математическое ожидание целевой функции; (15)

$\sigma_Z^2 = D[Z]$ - дисперсия целевой функции.

$$\sigma_Z^2 = a_1^2 \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \sigma_{x_2}^2 . \qquad (16)$$

Из выражений (14), (15) и (16) следует, что целевая функция распределена нормально.

Теперь, зная закон распределения плотности случайной величины целевого функционала промышленного предприятия, достаточно просто определить вероятность устойчивого функционирования мини-экономической системы из выражения

$$R = P(q^{**} \leq Z \leq q^{*}) = \int_{q^{**}}^{q^{*}} \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{Z - \bar{Z}}{2\sigma_Z^2}\right)^2} dz . \qquad (17)$$

Как уже отмечалось, интеграл (17) в явном виде не вычисляется и требует численного интегрирования. Чтобы избежать этого, введем нормированное нормальное распределение с $\overline{Z} = 0$ и $\sigma_Z = 1$.

Введем новую переменную $t = \frac{Z - \overline{Z}}{\sigma_y}$, тогда верхний и нижний пределы интегрирования можно записать в следующем виде:

$$t^{**} = \frac{q^{**} - \overline{Z}}{\sigma_Z} \text{ и } t^{*} = \frac{q^{*} - \overline{Z}}{\sigma_Z}.$$

В случае только верхнего ограничения $t^{**} \to -\infty$, а при только лишь нижнем ограничении $t^{*} \to \infty$.

После нормирования выражение (17) можно записать в виде

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t^{**}}^{t^{*}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (18)$$

Так как t является нормированной случайной величиной, распределенной по нормальному закону, вероятность устойчивого функционирования мини-экономической системы можно определить с помощью таблиц, приведенных, например, в прил. 2[10], или вычислить с помощью разложения подынтегральной функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$ в ряд Макларена и с последующим интегрированием частной суммы[11].

После указанных процедур формулу (18) можно записать в виде

$$R = \Phi(-\frac{q^{*} - \overline{Z}}{\sigma_Z}) - \Phi(-\frac{q^{**} - \overline{Z}}{\sigma_Z}), \qquad (19)$$

где Ф(.) - интеграл вероятности.

Вероятность устойчивого функционирования мини-экономической системы при двухстороннем ограничении можно записать в виде

$$R = \int_{t^{**}}^{t^{*}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t^{*}) - \Phi(t^{**}), \qquad (20)$$

где Ф(.) - функция Лапласа, которая приводится в справочнике[12].

При верхнем ограничении целевой функции мини-экономической системы нижний предел $t^{**} \to -\infty$, тогда выражение (20), учитывая, что $\Phi(-\infty) = 0$ [13], можно представить в виде

$$R = \int_{-\infty}^{t^{**}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t^{*}). \qquad (21)$$

В случае нижнего ограничения верхний предел $t^{*} \to \infty$. Учитывая, что $\Phi(+\infty) = 1$, выражение (21) можно записать в виде

$$R = \int_{t^{**}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \Phi(t^{**}). \qquad (22)$$

Таким образом, под экономической устойчивостью промышленного предприятия понимается свойство предприятия за определенное время достигать цели функционирования или развития. Признаком устойчивости предприятия относительно цели является попадание значений стоимости предприятия в область цели, а количественным показателем экономической устойчивости промышленного предприятия - вероятность достижения цели за заданное время.

Категория экономической устойчивости промышленного предприятия относительно цели выступает более информативной категорией, нежели устойчивость, понимаемая как способность системы возвращаться в состояние равновесия при внешних возмущающих воздействиях. Вероятность достижения цели за заданное время может принимать значение от 0 до 1, в то время как способность системы возвращаться в исходное состояние оценивается только двумя значениями: система либо способна возвращаться в исходное состояние, либо не способна.

Оценка экономической устойчивости промышленного предприятия должна основываться на системном подходе с использованием принципов устойчивости сложных систем. Устойчивость - это внешнее проявление внутренних свойств самого объекта.

Анализ устойчивости предприятия осуществлялся на основе генерируемого предприятием денежного потока, внутренних и внешних возмущений, заданной границе области цели. Автором проведена классификация возмущений, влияющих на динамику промышленного предприятия и, соответственно, на динамику денежного потока. Разработаны математические модели прогнозирования изменения денежного потока, генерируемого предприятием под воздействием возмущений и оценки случайного события попадания значений стоимости предприятия в область цели.

Модели позволяют установить зависимость устойчивости предприятия от начального "стартового" состояния предприятия, создают необходимую базу для управления устойчивостью, позволяют оценивать эффективность этого управления на основе сопоставления затрат на повышение устойчивости с приращением показателя устойчивости.

---

[1] *Ансофф И.* Стратегическое управление. М., 1989.

[2] *Баев И.А., Ширяев В.И., Ширяев Е.В.* Динамическая теория фирмы: монография. Челябинск, 2001.

[3] *Худякова Т.А., Шмидт А.В.* Исследование, оценка и прогнозирование экономической устойчивости промышленного предприятия. Челябинск, 2006.

[4] См.: *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятности и ее инженерные приложения. М., 2000; *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М., 2000; *Купер Дж., Макгиллем М.* Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М., 1989.

[5] См.: *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения; *Купер Дж., Макгиллем М.* Указ. соч.

[6] *Старикова С.С.* Экономическая устойчивость предприятия: методический подход: автореф. дис. … канд. экон. наук. Саранск, 1999.

[7] *Капур К., Ламберсон Л.* Надежность проектирования систем. М., 1980.

[8] См.: *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения; *Купер Дж., Макгиллем М.* Указ. соч.

[9] *Смирнов Н.В., Дудин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., 1965.

[10] *Капур К., Ламберсон Л.* Указ. соч.

[11] *Большаков В.Д.* Теория ошибок наблюдений. М., 1983.

[12] *Капур К., Ламберсон Л.* Указ. соч.

[13] *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятности и ее инженерные приложения.

Поступила в редакцию 02.02.2011 г.